

В.В. Александров
РАЗВИВАЮЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ И СИСТЕМЫ
Степенные законы

Истинные законы не могут быть линейными...
 Радость любви длится один миг, горечь любви
 длится всю жизнь.
 А.Эйнштейн

Введение

Существуют и появляются определения различным типам систем. Как правило, это связано с более точной идентификацией: области функционирования, математической моделью анализа и прочими специфическими ограничениями. Более подробно классификация систем рассмотрена в [1].

В данной статье рассматриваются поведение и формы устойчивого существования систем развивающегося типа. Они обладают инвариантными свойствами относительно многих областей знаний: физики, биологии, экологии, экономики, социологии, лингвистики и культурологии. Общим для развивающихся процессов и систем (РПС) междисциплинарным проявлением является степенной закон связи между: параметрами, признаками, элементами системы и их функционированием, как единого организма.

Результат работы любой системы обычно сводится к оценке некоего интегрального показателя - параметра, характеризующего реакцию системы на изменения в окружающей среде ряда локальных параметров. Так, например, индекс Доу-Джонсона есть интегральный показатель – параметр функционирования такой системы, как экономика. На рис. 1 и 2 приведены примеры соотношений между интегральными и локальными параметрами для различных систем. На рис. 1 интегральные параметры: а – количество автомобилей; b – производительность микропроцессоров; с – распределение слов в словаре; d – ряд Фибоначчи $f(n) = n - f(f(n-1))$; e – Закон Развития $(1-x)^{-0.618}$. Локальные параметры: для a,b – годы выпуска, с – буквы, d – номер итерации, e – количество слов.

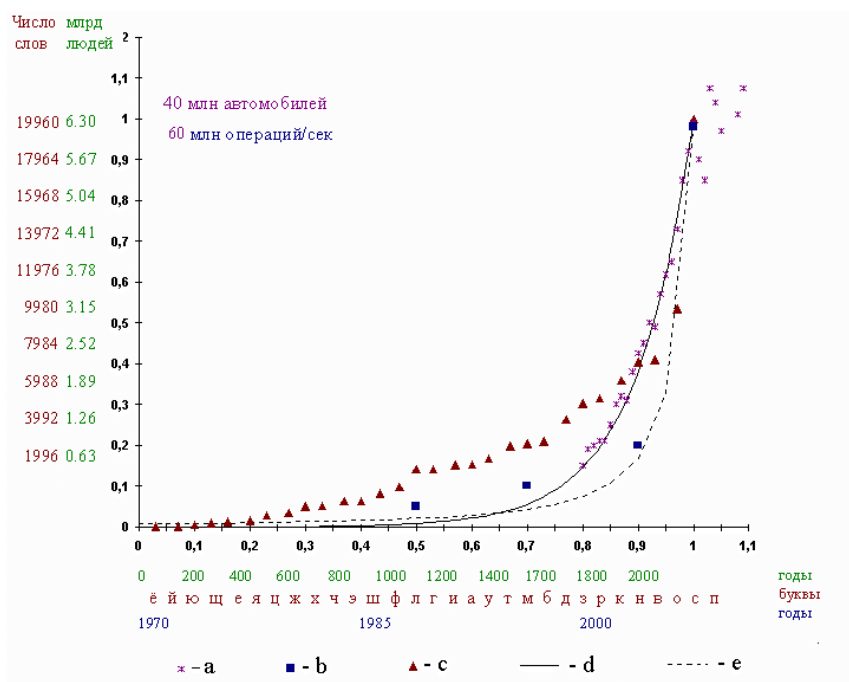


Рис.1

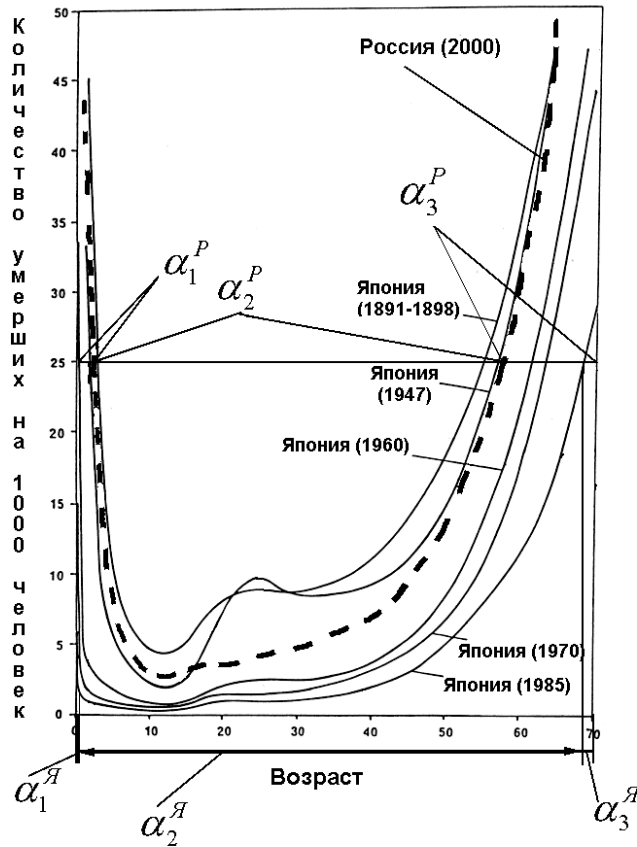


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики зависимости смертности – интегральный параметр с возрастом – локальный параметр.

Из приведенных выше примеров видна четкая и определенная гиперболическая зависимость между интегральными и локальными показателями РПС, которую можно назвать законом развития и роста.

Рост есть количественное увеличение числа элементов системы и их связей.

Развитие – качественное, структурное изменение самой системы.

Эта функциональная зависимость характерна и для оценки: надежности, качества, работоспособности, технологичности продукции, рынка капитала, бестселлеров и многих других процессов.

На рис. 3 представлен обобщенный график поведения различных РПС, где на примере двух «Г», из истории развития фундаментальной науки в России и Германии, приведены границы ее устойчивого существования.

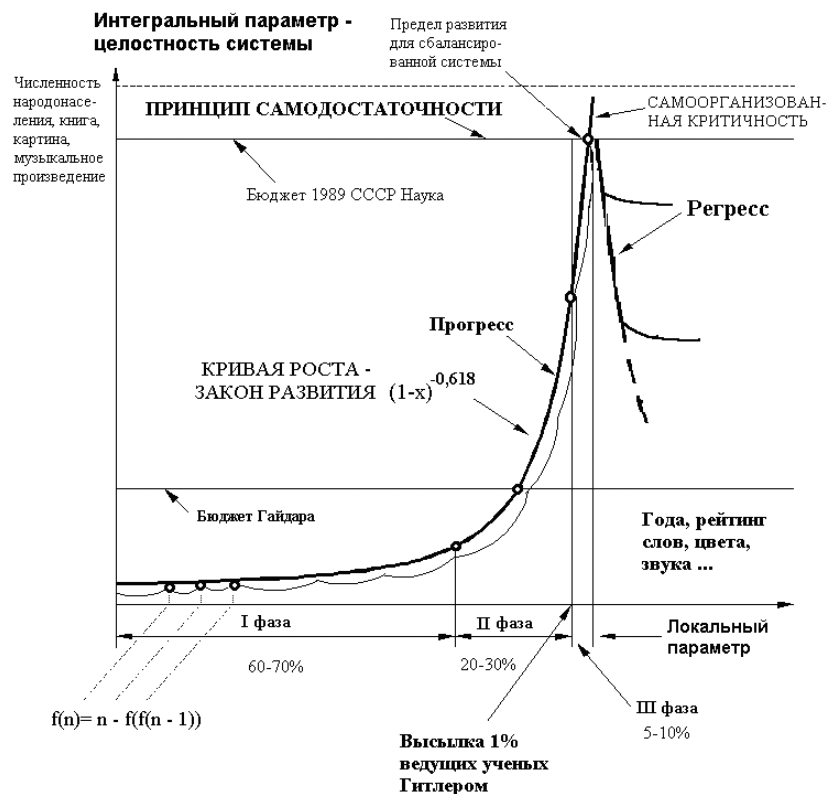


Рис.3

Представим результат функционирования развивающейся системы такой ее характеристикой, которая могла бы описывать систему как целое, т.е. «неким» интегральным параметром. Тогда «закон Развития» (рис. 3) может быть представлен функцией двух параметров: **интегрального** - результат функционирования развивающейся системы как единого организма, и **локального**, отражающего характерные структурные связи. Так, в кривой Фибоначчи интегральный параметр - популяция кроликов в целом, локальный - число поколений; для книги: число слов и рейтинг распределения слов по частоте встречаемости и т.д. Определение интегрального и локального параметров чрезвычайно существенно и является целью исследования развивающихся систем.

Первая фаза РПС – медленный количественный рост элементов и их связей, затем некоторое ускорение роста - вторая фаза, а далее переход к третьей фазе с ее стремительным экспоненциальным ростом. Причем третья фаза неизбежно приводит или к «бифуркации» системы, или к «окостенению» ее структур. Если на систему внешняя среда не оказывает воздействия, то структурный рост системы происходит в наиболее благоприятных условиях, и система может успешно реализовать весь свой внутренний потенциал.

Многочисленные наблюдения совершенно разных по своей природе РПС показали, что в третьей фазе происходят изменения в структурной динамике. Среди **сценариев поведения РПС** чаще всего встречаются разнообразные качественные изменения (бифуркации), которые характерны тем, что разрушаются старые структуры и развиваются процессы построения совершенно новых структур. В процессе такого развития система приобретает принципиально новые свойства. Математики для таких процессов и систем придумали красивые названия: теория катастроф, аттракторы и бифуркации.

Именно в третьей фазе незначительное, малое «вмешательство» в управление РПС приводит к «эффекту бабочки» и вызывает качественное изменение характера поведения системы. Например, стрельба, как провоцирование схода снежных лавин в горах, эффективна лишь при критической массе снега.

Иначе, вместо перехода системы на следующий уровень - качественного «скачка», происходит консервация – застой системы. Это принципиальное свойство РПС приводит к неопределенности вектора направленности в конце третьей фазы.

Согласно И.Р. Пригожину [2], «материя не является пассивной субстанцией; ей присуща спонтанная активность, вызванная неустойчивостью неравновесных состояний, в которые рано или поздно приходит любая система в результате взаимодействия с окружающей средой». Важно, что в такие переломные моменты (называемые «особыми точками» или «точками бифуркации») **принципиально невозможно предсказать, станет ли система менее или более организованной** («диссипативной», по терминологии И.Р. Пригожина).

Или качественный переход – «революционная» реформа (от индустриализации к информатизации и пр.) или застой-консервация.

И снова, иные - «интегральные и локальные параметры», но тот же степенной закон их функциональной связи.

Микродинамика РПС сугубо индивидуальна, а макродинамика строго соответствует **закону роста и развития и принципу самодостаточности**. Иначе говоря, **самоорганизация приводит к принципу самодостаточности развития и определяет строгие закономерности процессов структурного роста**. Систему, развивающуюся в таких условиях, мы называем **развивающейся самодостаточной системой**.

Эволюция как развивающийся процесс, достигая предела самодостаточности, начинает новый качественный скачок с повторения последовательно всех трех фаз. И, следовательно, процесс эволюции есть процесс, составленный из следующих друг за другом, различных относительно масштабных коэффициентов, процессов развития и роста. Это и предопределяет принципиальную трудность долговременного прогнозирования.

Так, в условиях ограниченных ресурсов, при приближении кривой демографического роста к границе «критичности», сама развивающаяся система порождает массу косвенных показателей (процессов). Она реагирует на них в соответствии с ее возможностями: увеличение ресурсов (сдвиг границы самодостаточности вверх) - экспансия, создание колоний, новые технологии и т.д., или замедление - переход из третьей фазы процесса развития в первую.

Общим же для РПС является **степенной закон развития**: элементов, связей, стоимости рисков и т.д., символизирующий иерархию структурных связей, адекватный аналог которых - древовидные структуры (например, типа Фибоначчи и др.) с различной скоростью развития [3,4].

Для подобных структур и характерны **три фазы развития**.

В первой фазе развития, число элементов системы остается постоянным или увеличивается линейно с коэффициентом роста $0 < KR \leq 1$ ($KR = \Delta N / N$, где: ΔN - увеличение числа элементов развивающейся системы за интервал времени равный Δt , N - количество элементов в системе на начало интервала Δt). Такой темп развития на первой фазе показали все доступные наблюдению и измерению развивающиеся системы.

Если длительность всего процесса устойчивого направленного развития системы принять за 100%, то на первую фазу приходится от 50% до 70%. Некоторые виды развивающихся систем находятся в первой фазе весь период возможного их наблюдения, что и **позволяет с высокой степенью надежности прогнозировать поведение системы**.

На второй фазе развития скорость роста числа элементов в структуре системы увеличивается – число элементов растет уже не линейно, но коэффициент нелинейного роста незначителен по величине и общая картина изменений на этом этапе близка к

линейной, хотя уже и заметно от нее отличается. По длительности эта фаза занимает 20-30% всего интервала развития и поэтому прогнозирование еще возможно, но уже **при стохастическом подходе** на коротком отрезке времени.

Вторая фаза развития переходит в третью при условии, что это **позволяет внешняя, по отношению к системе, среда.**

На третьей фазе развития наблюдается устойчивый и интенсивный рост числа элементов системы и, вместе с этим, усложнение структуры со скоростью, близкой к скорости роста геометрической прогрессии – так называемый экспоненциальный рост (5-10%).

Заметим, что все предсказания «катастроф» (экологических, экономических, социальных и др.) связаны с наступлением третьей фазы развития. Так, в XVIII веке Т. Мальтус в связи с изучением темпов роста народонаселения и сравнением с темпами роста производства энергии и продуктов питания, обратил внимание на эту фазу. Он показал ее значение, но не понял, что анализирует только одну из совокупности фаз, и поэтому сделал «катастрофический» прогноз о процессе развития в целом.

Вопреки его прогнозу (наступит момент, когда кончатся все природные источники сырья), ни один из природных ресурсов, как возобновляемых - сельскохозяйственная продукция, так и не возобновляемых – минеральное сырье, не исчерпан и, как показывают тенденции последних лет, не будет исчерпан и в будущем. Один вид «энергии» и «интеллекта» замещается другим, но принцип **самодостаточности развития** не будет нарушен.

Структура РПС, в течение третьей фазы, интенсивно растет и усложняется, число разветвлений и связей становится очень большим, что проявляется во «взрывном» характере наращивания числа элементов системы и установлением многочисленных межэлементных связей.

Так как скорость роста числа элементов на этой стадии развития очень велика, то система быстро оккупирует доступное ей пространство и исчерпывает имеющиеся у нее ресурсы.

Третья фаза развития является «критической», то есть такой, которая неизбежно приводит либо к возврату в **первую** фазу, либо к «катастрофе». Под «катастрофой» здесь понимается разрушение структуры системы на отдельные фрагменты, прекращение прежнего процесса развития и переход к другим структурам и другим процессам. Именно в неопределенности этого перехода и заключается принципиальная не прогнозируемость направленности динамических процессов в развивающихся системах.

Новый феноменологический факт XXI века связан с различной скоростью изменения биологического и социально-технологического времени.

«...этот феномен так и назвали – «Эффект ускорения исторического времени». Анализ показывает, что все реперные точки исторической и биосферной эволюции точно укладываются на одну и ту же математическую прогрессию! Но геометрическая прогрессия – штука опасная. Она всегда упирается в какой-то предел. В нашем случае это предел на временной оси, где частота революционных вспышек стремится к бесконечности, а период между ними – к нулю...»¹.

Можно допустить, что медленно, незаметно для поколений, генетическая составляющая биологического интеллекта растет, но значительно медленнее, чем социально-технологическая составляющая. Интеллект по IQ определяется не только обучением, но и генетически закрепляется и передается [5].

В XX-м веке не сбылись прогнозные ожидания Т. Мальтуса. Возникли качественно иные социально-политические факторы и индустриальная технология производства продуктов.

¹ Александр Никонов. Новая газета, № 59 (989) 16.08 – 18.08.2004

В XXI-м веке уже «искусственный интеллект и разум», по-видимому, должны быть способны сглаживать и управлять процессом расхождения возможностей биологического интеллекта и его требуемой интенсификацией на основе новых образовательных мультимедийных технологий, например: интернет-образование, информационно-аналитические и логистические компьютерные системы.

Темп смены поколений, как биологическая характеристика, на протяжении всего исторического процесса демонстрирует свойство неизменности. Ни демография, ни развитие социальных, экономических и технологических факторов никак на сроке смены поколений не отражаются.

Прогресс и цивилизация изменяют окружающий мир, но неизменным фактором остается интервал времени обновления – **смены поколения** $F_{биол.}$. Биологическая (генетически заданная) частота смены поколения почти постоянна и равна 65 ± 10 лет.

Еще более постоянна и биологическая, генетически определенная продуктивность – осмысленная, функциональная работоспособность человека после получения профессиональных навыков и знаний.

Итак, имеется неизменный, генетически определяемый фактор смены человеческой популяции и постоянно прогрессирующий, социально цивилизационный фактор, проявляющийся в степенном законе РПС, и определяющий смену технологий, а также необходимых навыков и профессиональных знаний $F_{соц.}$.

Особенно заметным стало расхождение между генетической сменой поколений $F_{биол.}$ и социальными изменениями $F_{соц.}$ в начале XXI века с развитием цифровых информационных технологий, прогресс в которых особенно остро поставил вопрос постоянного обновления знаний.

Это наиболее очевидный факт потребности в развитии симбиоза «компьютерного» и биологического интеллекта и разума, проистекающем из потребности все возрастающих темпов смены образовательных парадигм [5].

Исторический дискурс

Парадокс состоит в том, что изначально человек, как биологически развивающийся процесс и «система», начал исследование с самого себя. В V-м веке Витрувий [6] совместил изображение человека с кругом. Это знаменитый «квадрат древних». Естественным центром человеческого тела, по Витрувию, является пупок: «Ибо, если положить человека навзничь с распростертыми руками и ногами и приставить ножку циркуля к его пупку, то при описании окружности линия ее коснется пальцев обеих рук и ног. Точно так же, как из тела может быть получено очертание окружности, из него можно образовать и фигуру квадрата. Ибо, если измерить расстояние от подошвы ног до темени и приложить ту же меру к распростертым рукам, то получится одинаковая ширина и длина, так же как на правильных квадратных площадках».

Отсюда и **канон** человеческого тела (рис. 4), выполненный Леонардо да Винчи.



Рис. 4

Vitruvio architetto mette nelle sue opera d'architettura che le misure dell'omo..."

«Архитектор Витрувий заложил в своей архитектуре измерения человека...»

Витрувианский человек - рисунок, сделанный Леонардо да Винчи примерно в 1490-92 годах, как иллюстрация книги, посвященной трудам Витрувия.

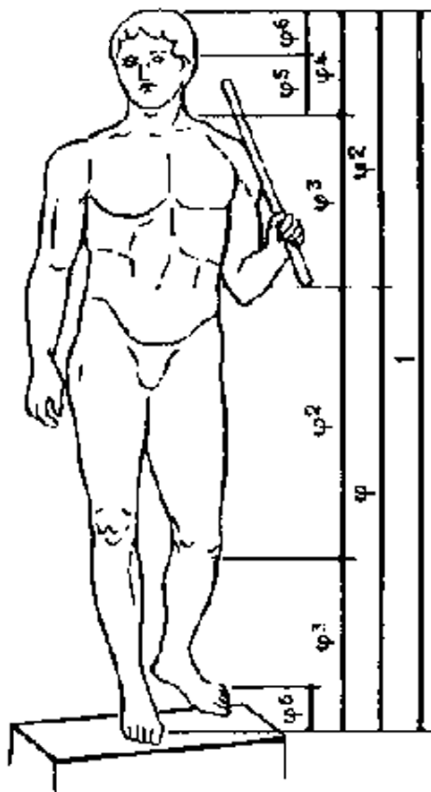


Рис. 5

Таблица 1

Возраст, лет	Высота	Показатель
0	0,485	2,00
1		1,90
2	0,863	1,84
3	-	1,79
.....
10	-	1,64
11	-	1,63
12	-	1,63
13	-	1,625
.....
17	-	1,590
.....
21	1.731	1,625

А. Цейзинг (таблица 1, 1850г.) показал, что устойчивое параметрическое соотношение, признак завершившегося развития организма человека, достигается к 21-му году. Отсюда и без анализа какой-либо математической модели и статистики очевидно, почему 21-й год, во многих странах, считается совершеннолетием и до его наступления не рекомендуется алкоголь.

Другой пример изображения совершенного человека - канон Поликлета (Рис. 5). Статуя Дорифора, выполненная Поликлетом отражает развивающийся процесс в своей «сигнальной» (данные) форме, как инвариантные показатели пропорций человеческого тела. Подчеркнем, что здесь не декларируется магия и прочие свойства числа Фибоначчи, а обращается внимание на одно из наиболее известных проявлений степенного закона (золотое сечение).

В средневековой Европе с пропорцией золотого сечения познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик и комментатор Евклида Дж. Компано из Новары (XIII в.) добавил к тринадцатой главе «Начал» предложение, содержащее арифметическое доказательство несоизмеримости отрезка и обеих частей золотого сечения [7].

В хронологическом порядке проблема золотого сечения рассматривалась в сочинении «Liber abacsi» («Книга об абаке», 1202 г.), Леонардо из Пизы, который известен больше как Фибоначчи (т.е. сын доброй природы).

В ботанике А. Цейзинг открыл «закон углов», согласно которому угловые расхождения ветвей соответствуют делению человеческого тела через точку пупка по принципу Ф. Это значит, что средняя величина углового отклонения $\alpha = 137^{\circ}30'28''$, из чего следует:

$$\frac{\alpha}{(360^{\circ} - \alpha)} = \frac{(360^{\circ} - \alpha)}{360^{\circ}}$$

Если принять $360^{\circ} - \alpha = \beta$, то это равноценно

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)}$$

И далее: «...небезынтересно отметить, что задним числом было найдено логическое объяснение наличию золотого сечения в ботанике. Если вычислить, какой постоянный угол должны образовывать листья или ветви растения (расположенные вдоль стебля или ствола восходящими спиралями), чтобы получить наибольшее количество вертикально падающего света (так, чтобы их горизонтальная проекция никогда не покрывалась целиком), то математическим решением этой проблемы является угол

$$\alpha = \frac{306^{\circ}}{\Phi^2} = 137^{\circ}30',$$

получившим наименование идеального угла».

Сам по себе постулат первичности понятия системы требует для своего раскрытия определения свойств: свода правил - канонизации (канон – от греческого правило), аксиом и т.д.

Приведем характерный пример канонизации «солнечной системы».

Н. Коперник обнаружил в геоцентрической системе К. Птолемея ряд фундаментальных недостатков. Это касалось, прежде всего, принципов построения теорий и их методологических основ, если пользоваться современной терминологией. Н. Коперник обращает внимание на то обстоятельство, что геоцентрическая концепция не представляет собой единой, стройной картины мира. Давая объяснения каждому отдельному наблюдаемому явлению, она не в состоянии привести к построению **внутренне непротиворечивой, согласованной системы знаний**. Для описания движения небесных светил в каждом отдельном случае К. Птолемей использовал особые «начала», несвязанные друг с другом принципы и основания для объяснения.

В 1945 г. Д.Е. Ричардсон предложил использовать для описания планетарных расстояний числовой ряд, имеющий вид геометрической прогрессии со **знаменателем 1,728**. В этот ряд входит и значение, соответствующее поясу астероидов, но значение, **соответствующее Плутону, отсутствует**. Таким образом, правило Тициуса-Боде и открытие Д.Е. Ричардсона как бы дополняют друг друга, описывая по отдельности орбиты

Плутона и Нептуна. Ниже представлена таблица 2 из [8], где перечислены объекты солнечной системы и их характеристики.

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7
(11)	224,5	Плутон	248,9	38,80		39,65
(12)	137,4	Нептун	164,7		30,77	30,07
1	84,01	Уран	84,01	19,60	17,80	19,19
2	51,38					
3	31,43	Сатурн	29,46	10,0	10,30	9,539
4	19,22					
5	11,76	Юпитер	11,86	5,20	5,962	5,203
6	7,190	Астероиды			3,451	2,1-4,3
7	4,40	-«-		2,80		-«-
8	2,690					
9	1,645	Марс	1,881	1,60	1,997	1,524
10	1,006	Земля	1,0	1,0	1,156	1,0
11	0,6154	Венера	0,6160	0,70	0,6687	0,7230
12	0,3764					
(13)	0,2302	Меркурий	0,2409	0,40	0,3870	0,3870

Отметим, что отсутствие Плутона в «б»-м столбце Д.Е. Ричардсона **узаконено лишь в августе 2006 года** на 26-й Генеральной ассамблеи Международного астрономического союза (МАС), где была изменена классификация объектов Солнечной системы [9].

В 1956 году геологи Бено Гутенберг и Чарльз Рихтер обнаружили, что число сильных землетрясений N , высвобождающих определенное количество энергии E , определяется степенным законом:

$$N = \frac{K}{E^\gamma} \quad (1)$$

где γ приблизительно равно 1.5; K – константа.

Показатель γ универсален в том смысле, что он не зависит от географического района. Сильное землетрясение или наводнение следует за длительным периодом их отсутствия. Поэтому подобные развивающиеся процессы, в которых характеристики динамически изменяются во времени, требуют иных подходов при их анализе [10].

В настоящее время достаточно полный аналитический обзор по степенным законам содержится в [11]. Кратко приведем их концептуальную суть:

...однородные степенные законы (например, открытый Ньютоном закон всемирного тяготения $F \sim r^{-2}$) в изобилии встречаются в природе.

Степенные законы описывают и спектры мощности всевозможных звуковых сигналов и шумов. Самый загадочный из них – вездесущий (хотя иногда и труднообъяснимый) фликер-шум $1/f$ (где f – частота). Он не является ни «белым» (т.е. независимым от частоты), ни коричневым (с зависимостью $1/f^2$, как при броуновском движении), а имеет некоторый промежуточный показатель, вследствие чего его иногда называют розовым шумом. При акустических исследованиях предпочтение отдается опять же розовому шуму, так как его мощность постоянна в интервале октавы (а не герца) и поэтому хорошо соответствует шкале частот внутреннего уха.

Степенные законы исследовал и итальянский экономист В. Парето (1848-1923), обнаружив, что число людей с доходом, превышающим некоторую величину, следует простому степенному закону. Другие примеры степенных законов в экономике и возникающих при этом логических ошибок были проанализированы Б. Мандельбротом.

Наиболее же впечатляет, не имеющий пока строгого теоретического обоснования, следующий факт постоянно демонстрируемый телевидением: при произвольных опросах в реальном времени распределение голосов, казалось бы разно видовой и случайной аудитории (звонящих), с точки зрения классической статистики, фантастически быстро достигает устойчивых предельных соотношений.

Этот эмпирический факт и позволяет по коротким выборкам опросов на выходе избирательных участков (exit pool), не только прогнозировать окончательные результаты, но и обнаружить постороннее вмешательство в естественный ход процесса.

В настоящее время известны различные математические модели степенных функций [12, 1]. Однако их анализ затруднен: выбором и масштабированием «интегральных и локальных параметров», установлением семантико-смыслового контекста и выявлением причинно-следственных связей. Отсюда, все еще необходима опора и на знания профессионала предметной области. Иначе, возникают «логические ловушки» типа: «солнце всходит и заходит» и « раскрытый зонт вызывает дождь».

Математические модели РПС

Любые развивающиеся системы, в том числе и биологические как синоним живых организмов, в силу различных естественных ограничений при их моделировании классическими математическими моделями всегда приводят к нелинейным динамическим системам [1]. Формулировка же проблемы нелинейной динамики и метод построения пространства параметров бифуркационными границами, восходит еще к работам А.А. Андронова(1933г.) [13]. Однако, консерватизм математического мышления сохраняется за такими названиями как теория хаоса и синергетика, апеллируя к частной математической и компьютерной модели погоды К. Лоренца [14,15]. В [14] К. Лоренц дал специфическое определение хаоса как невозможности прогнозирования результата конкретной математической модели, сформулированной как «детерминистический непериодический поток».

Непериодический детерминистический процесс не является синонимом понятия хаоса. Хаос интерпретируется лишь как невозможность получения однозначного решения (прогноза) на определенных математических моделях.

Еще более странным является введение понятия джокера, синонимом которого в синергетике и является понятие параметра порядка, подробно исследованное в [1] до появления понятия синергетики.

Проблема математического моделирования нелинейных процессов и систем была сформулирована в 1950-х А.Н. Колмогоровым [16] «...в математическом естествознании господствовало моделирование реальных явлений при помощи математических моделей, построенных на математике бесконечного и непрерывного. Например, изучая процесс молекулярной теплопроводности, мы представляем себе непрерывную среду, в которой температура подчинена уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

Математики привыкли рассматривать соответствующую разностную схему

$$\Delta_t u = K (\Delta_{xx} u + \Delta_{yy} u + \Delta_{zz} u) \quad (3)$$

лишь как возникающую при приближенном решении «точного» уравнения (2). Но реальный процесс теплопроводности не более похож на свою непрерывную модель, выраженную уравнением (2), чем на дискретную модель, выраженную непосредственно уравнением (3).

Весьма вероятно, что с развитием современной вычислительной техники будет понято, что в очень многих случаях разумно вести изучение реальных явлений, **избегая промежуточный этап их стилизации**, в духе представлений математики бесконечного и непрерывного...».

«...Для конечных последовательностей нет резкой грани между «закономерным» и «случайным»; из традиционной теории вероятностей мы знаем, что в настоящих случайных последовательностях встречаются сколь угодно длинные последовательности сплошных единиц и сплошных нулей. Понятно, что описание заканчивающихся таким образом отрезков бесконечной последовательности может быть существенно упрощено по сравнению со стандартным.

Мы подчеркнули неизбежную относительность различия между «случайным» и «неслучайным» в применении к конечным объектам. Аналогично дело обстоит и в основах теории информации. По существу она применима к большим массивам информации, при рассмотрении которых начальная информация, заключенная в способе построения самой теории, исчезающе мала. «Универсальный метод программирования» и существует в том смысле, что имеются методы программирования A , обладающие свойством

$$H_A(x|y) \leq H_A(x|y) + C_A$$

и позволяющие программировать «что угодно» с длиной программ, которая превосходит длину при любом другом методе программирования не более чем на константу, зависящую лишь от этого второго метода программирования, а не от объектов x и y . Важно лишь понимать, что, обращаясь к теории вероятностей, мы прибегаем к значительно более грубой релятивизации.

Реальное истолкование вероятностных результатов всегда статистическое, и оценки ошибок, получающихся при применении вероятностных результатов к конечным объектам, значительно грубее».

Но и через 50-лет, при компьютерном моделировании, все еще опираются на математику «бесконечного». В основе этого лежит подмена конкретных исследований: природных, физических, социальных, экономических, и других процессов – исследованием собственных, априорно заданных свойств математических моделей. Не смотря на то, что в [1,17] показано: параметрическое представление свойств системы – поиск параметра порядка, при анализе математических моделей нелинейной динамики, не имеет прямых аналогий со свойствами исследуемых физических, экологических и прочих процессов. То есть параметр порядка очень часто, даже косвенно, не отражает: физические, социальные и экономические свойства исследуемых систем.

Степенные законы

Приведем кратко выдержки из [18, 4, 19, 20] с пояснениями инженерно - программистскому сословию и необходимыми коррекциями области применимости степенных законов. Подчеркнем связь степенных законов со многими информационно - коммуникационными процессами. Социальные и экономические характеристики, тексты, картины и музыкальные произведения имеют удивительно инвариантные распределения: индексов, капиталов, слов, цвета, спектра частот, тональностей, нот, и др. Они имеют вид рангового - рейтингового типа с показателями степенного закона $1/f^\alpha$, при $\alpha \sim 1,4..1,8$.

Заметим, что впервые строгое математическое описание развивающихся процессов было представлено К. Вейерштрасс (1872 г.), как контр пример не дифференцируемости непрерывных функций [21].

18 июля 1872 г. К. Вейерштрасс доложил Берлинской академии наук свой знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где b – нечетное целое, большее единицы, $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Функция К. Вейерштрасса является **непрерывной не дифференцируемой функцией**, и ее публикация в 1875 г. принята за точку отсчета кризиса математики.

Пример К. Вейерштрасса потряс математиков. Он подорвал интуитивное представление о том, что к непрерывной кривой всегда можно провести касательную. «Как интуиция может обмануть нас до такой степени?» — спрашивал А. Пуанкаре. Эрмит говорит о том, что он «с ужасом отворачивался от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной».

Так как к исследованиям таких функций оказались не готовы математики и не применимы классические методы анализа, то присвоили им статус «плохих» и перестали публиковать. Эти функции, в том числе и заполняющая пространство кривая Дж. Пеано (1890), ожидали появления алгоритмов их компьютерного моделирования [4,22,23,24, 25] и понятия «фрактала» [18].

В [18] показано, что спектр функции К. Вейерштрасса адекватен спектрам музыкальных произведений, которые имеют вид $1/f^\alpha$, при $\alpha \sim 1,2..1,8$. рис. 6

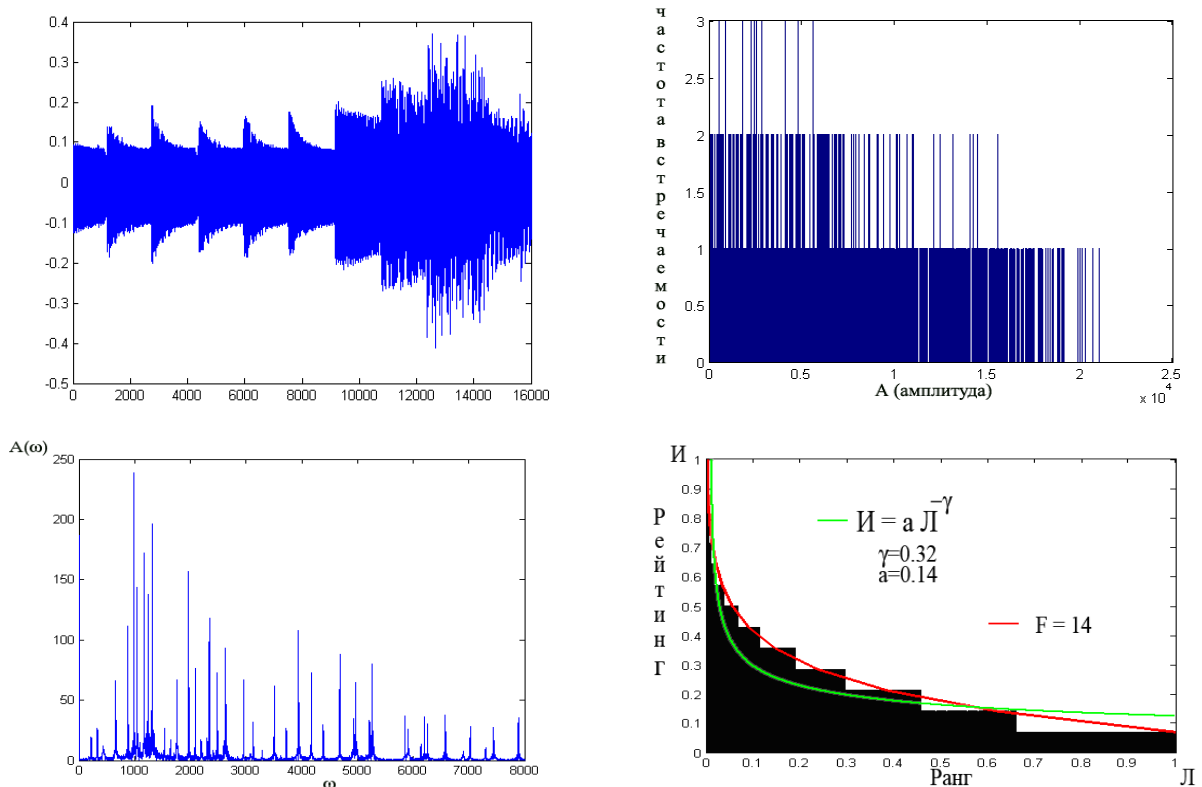


Рис. 6

Ответ на вопрос «почему спектры частотных интервалов и амплитуд интересных музыкальных произведений (некоторых, по крайней мере) являются гиперболическими?» следует из «теории эстетической ценности», предложенной американским математиком Джорджем Дэвидом Биркгофом (1884-1944). Суть этой теории сводится вкратце к тому, что произведение искусства приятно и интересно лишь при условии, что оно не слишком правильно и предсказуемо, и в то же время не таит в себе слишком много сюрпризов. Переведя сказанное на язык степенных функций, основную идею Д.Д. Биркгофа можно интерпретировать в следующем смысле: спектр мощности «эстетической» функции не должен вести себя ни как утомительно однообразный «коричневый» шум с зависимостью от частоты f^{-2} , ни как белый шум Af^0 .

В. Парето, Б. Мандельброт, Дж. Ципф и др., опираясь на эмпирические данные лишь своей предметной области (экономика, социология, лингвистика и др.) отыскивали «наилучшие» аппроксимирующие параметры и показатели степенного закона.

Приведем наиболее распространенные их виды:

$$n(x, N) = A / (X^\gamma), \quad \gamma = 1 + \alpha,$$

где A - масштабный коэффициент, N - объем выборки – текст, x – слово, α – показатель Ципфа эмпирически вычисляемое значение которого и называют «законом».

Ранговое представление распределения Дж. Ципфа:

$$x_r = C / (r^\beta), \quad \text{где } \beta = 1/\alpha, \quad C = \alpha B^{1/\alpha}$$

Ранговое представление распределения Б. Мандельброта:

$$x_r = C / (B + r)^\beta,$$

где C, B - масштабные коэффициенты, β - показатель Б. Мандельброта.

Распределение В. Парето:

$$f(x) = \frac{C}{x^{c+1}},$$

где $c > 0$ - параметр формы распределения.

Показатель Херста (H) – аппроксимирующий показатель нормированного размаха R/S временного ряда (ВР): колебания курса «доллар-рубли»; индексные показатели; уровень подъема воды и др. в логарифмических координатах.

$$x_\tau = \log\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad y_\tau = \log(R(\tau)/S(\tau)),$$

$$\text{где } R = R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau}(X_{\tau,t}) - \min_{1 \leq t \leq \tau}(X_{\tau,t}) \quad S = S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (x_i - \bar{x}_\tau)^2}$$

Тренд анализ «волны – Р. Эллиотта» [26]

Тренд или тенденция – некий выбранный «эталон-предыстория» динамики изменения того или иного показателя анализируемого процесса. На рис. 7 приведен график динамики поведения рынка, представленный разномасштабной, самоподобной структурной иерархией.

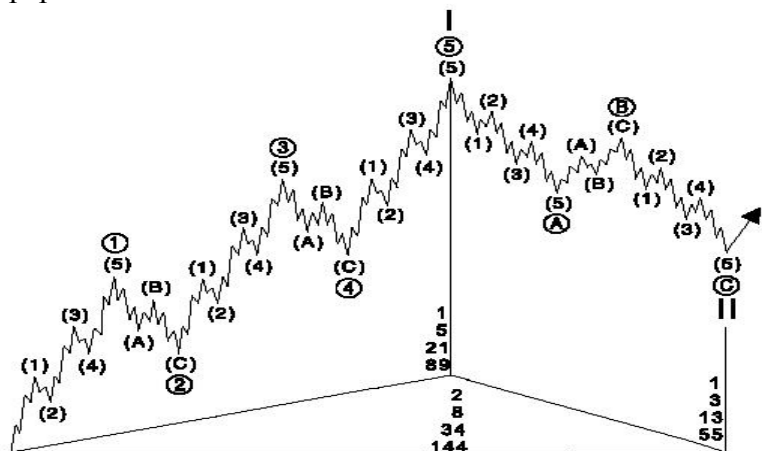


Рис. 7 Фрактальная модель Р. Эллиотта

Волна – это эмпирически выбранный отрезок – сегмент временного ряда (ВР), отражающий семантико-смысловую характеристику исследуемого процесса. Считается,

что любое движение цены можно представить в виде пяти волн в направлении более сильного тренда, и на три волны – в обратном направлении. Р. Эллиотт был одним из первых, кто заметил присутствие разномасштабной иерархии самоподобных сегментов в РПС. Однако использование понятия «фрактальная модель» для РПС не корректно, и не конструктивно. В контексте моделирования этих процессов наиболее актуальной задачей является проблема прогнозирования дальнейшего поведения рассматриваемых ВР. Принципиально важным является определение интервала достоверного прогнозирования. Общеизвестным является тот факт, что «памятью» обладают многие природные ВР (наводнения, землетрясения, цунами). Именно: R/S-анализ, поиск самоподобия и наличие степенных зависимостей определяет наличие или отсутствие интервально-иерархической циклической памяти.

Неоднозначность параметрической аппроксимации, по приведенным выше формулам, связана с влиянием масштабируемых коэффициентов на показатель степени. Отсюда и эмпирический характер анализа и трудности с выбором интервала (масштаба) прогнозирования, т.е. структурного ранга, уровня иерархии.

Ярким же признаком РПС при статистическом анализе, в том числе катастроф и стихийных бедствий, является существование у распределений взаимосвязанных 3-х контингентных (однородных) событийных участков: НВТ - «head-body-tail», «голова-тело-хвост». Их совместное проявление, как единого организма (системы), оказывается правилом, практически не знающим исключений. Так распределены последствия следующих бедствий: наводнений ($\alpha \sim 1.35$), торнадо ($\alpha \sim 1.39$), ураганов ($\alpha \sim 1.58$), землетрясений ($\alpha \sim 1.41$) [27]. Подобные характеристики присущи многим другим явлениям: эпидемиям, лесным пожарам, снежным лавинам, солнечным вспышкам, столкновениям метеоритов с Землей, а также социальным и политическим процессам.

Такое устойчивое поведение РПС позволяет подменить проблему параметрической аппроксимации степенных функций выявлением структурного ранга и интервалов контингентных (однородных) событий НВТ. И перейти от рангового (rank- линейный порядок) распределения к рейтинговому (rate-функциональному, пропорциональному упорядочению). Ранговое распределение – линейная упорядоченность элементов в системе. Рейтинговое распределение – характеризует относительную значимость: место, вес, структурный ранг элемента (объекта) системы.

Концептуально степенные функции отражают наличие в системе структурной иерархии – уровни групповых (кластерных) упорядочений, связывающей между собой понятия ранга и рейтинга. Введение же критерия эквивалентности (ε_r) (идентификация неразличимости Лейбница) позволяет выявлять структурный ранг (r_s), как уровень иерархии.

Проиллюстрируем приведенные термины и понятия на следующем примере [29]:

Таблица 3

Ранг г	Имя	Капитал (в млрд.)	Рейтинг (отн.)	ε_r	r_s	НВТ
1	William Gates III	50.0	1		1	Н
2	Warren Buffett	42.0	0.84	>0.15	1	Н
3	Carlos Slim Helu	30.0	0.6	>0.15	1	Н
4	Ingvar Kamprad	28.0	0.56		2	Н
5	Lakshmi Mittal	23.5	0.47	>0.03	2	В
6	Paul Allen	22.0	0.44		3	В
7	Bernard Arnault	21.5	0.43	>0.009	3	Т

8	Prince Alwaleed Bin Talal Al Saud	20.0	0.4	>0.009	3	T
9	Kenneth Thomson & family	19.6	0.39	>0.009	3	T
10	Li Ka-shing	18.8	0.38	>0.009	3	T
11	Роман Абрамович Roman Abramovich	18.2	0.36		4	T
12	Michael Dell	17.1	0.342	>0.0015	4	T
13	Karl Albrecht	17.0	0.34	>0.0015	4	T
14	Sheldon Adelson	16.1	0.322	>0.0015	4	T
15	Liliane Bettencourt	16.0	0.32	>0.0015	4	T
16	Lawrence Ellison	16.0	0.32	>0.0015	4	T
17	Christy Walton	15.9	0.318	>0.0015	4	T
18	Jim Walton	15.9	0.318	>0.0015	4	T
19	S Robson Walton	15.8	0.316	>0.0015	4	T
20	Alice Walton	15.7	0.314	>0.0015	4	T
21	Helen Walton	15.6	0.312	>0.0015	4	T
22	Theo Albrecht	15.2	0.3	>0.0015	4	T
23	Amancio Ortega	14.8	0.296	>0.0015	4	T
24	Steven Ballmer	13.6	0.27	>0.0015	4	T
25	Azim Premji	13.3	0.266	>0.0015	4	T

В [4] было предложено представить структурную иерархию степенных законов самоподобными рекурсивно-древовидными структурами. Например, рекурсивная формула порождения «дерева» Фибоначчи имеет вид:

$$f(n) = n - f(f(n-1)), \quad f(0) = 0$$

Таблица 4

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(n) =$	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8

Эта таблица порождает рис. 8 - структурную связь элементов «дерева» Фибоначчи.

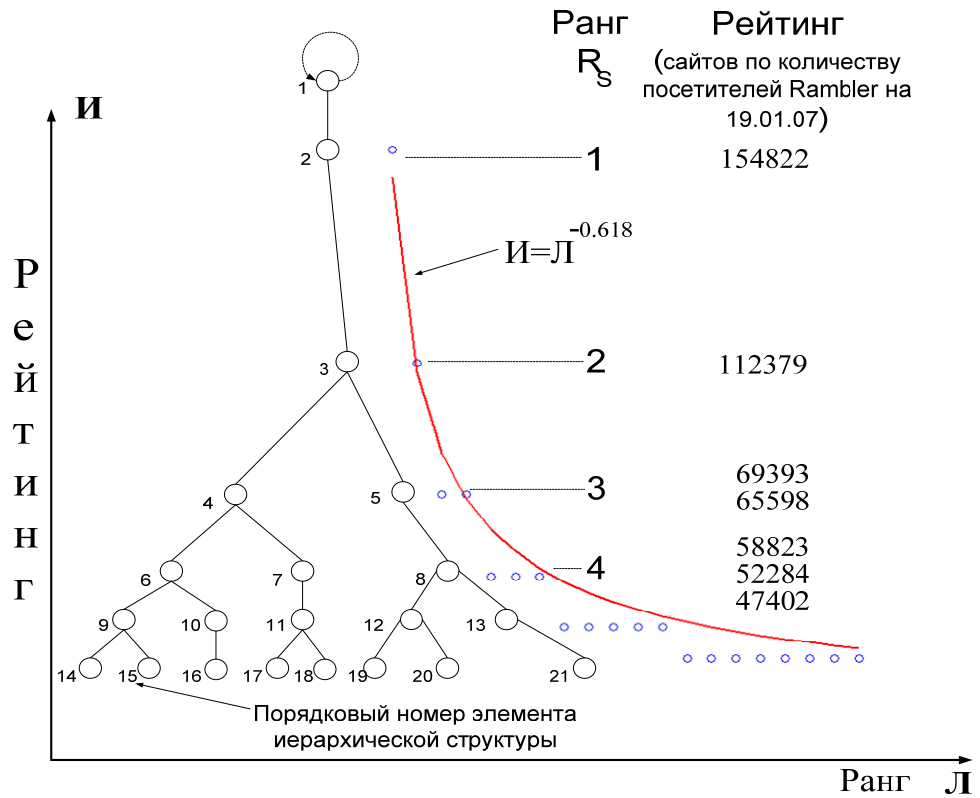


Рис. 8. «Дерево» Фибоначчи

Приведем дополнительно следующие примеры рейтинго-ранговых распределений:
 - пример рейтингового распределения доходов от уровня образования по материалам США.

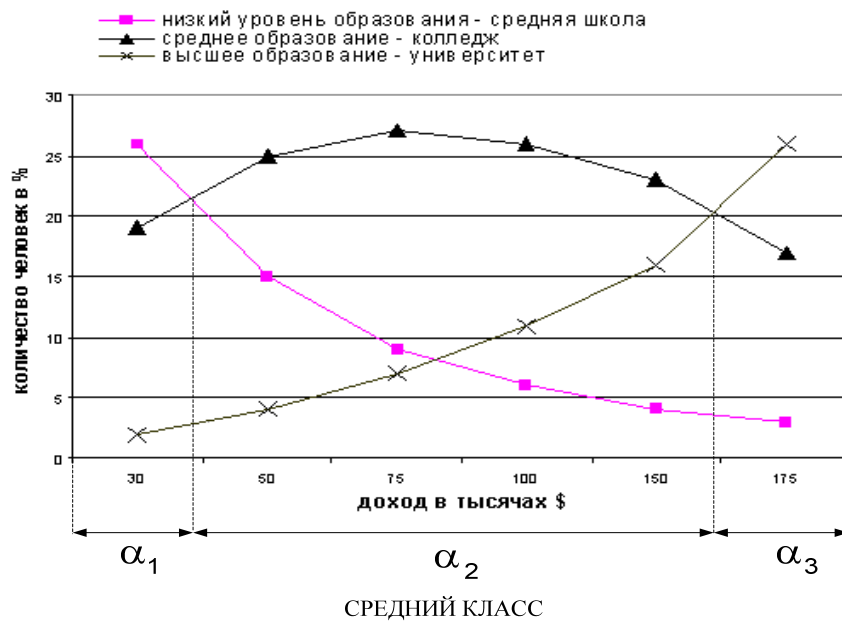


Рис. 9

- пример рейтингового распределения банков по количеству в группах.

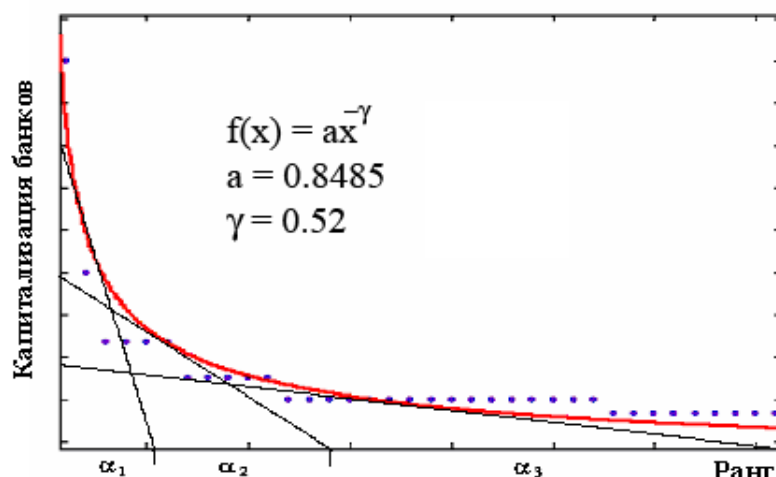


Рис.10

Ранг - структурный анализ рейтингового представления ряда РПС.

1. Демография. Сопоставление данных демографии (рис. 2) по России и Японии показывает:

- демографическая ситуация в России 2000 года сопоставима с графиком после военной разрухи, системного кризиса Японии 1947 года. Следовательно, и демографическая ситуация в России 2000, отражает не устойчивый характер реформ экономических и социальных процессов.

- графики возрастной смертности имеют три ярко выраженных контингентных участка: младенческая смертность, рабочий и доживание.

- при сопоставлении графиков отчетливо виден провал России (2000г) относительно Японии (1985г) на **интервале доживания** - почти 20 лет.

На что никак не может влиять правительственная поддержка рождаемости.

2. Наводнение. На рис 11. представлены данные уровня воды в реке Нева с 1703 по 2000 годы.

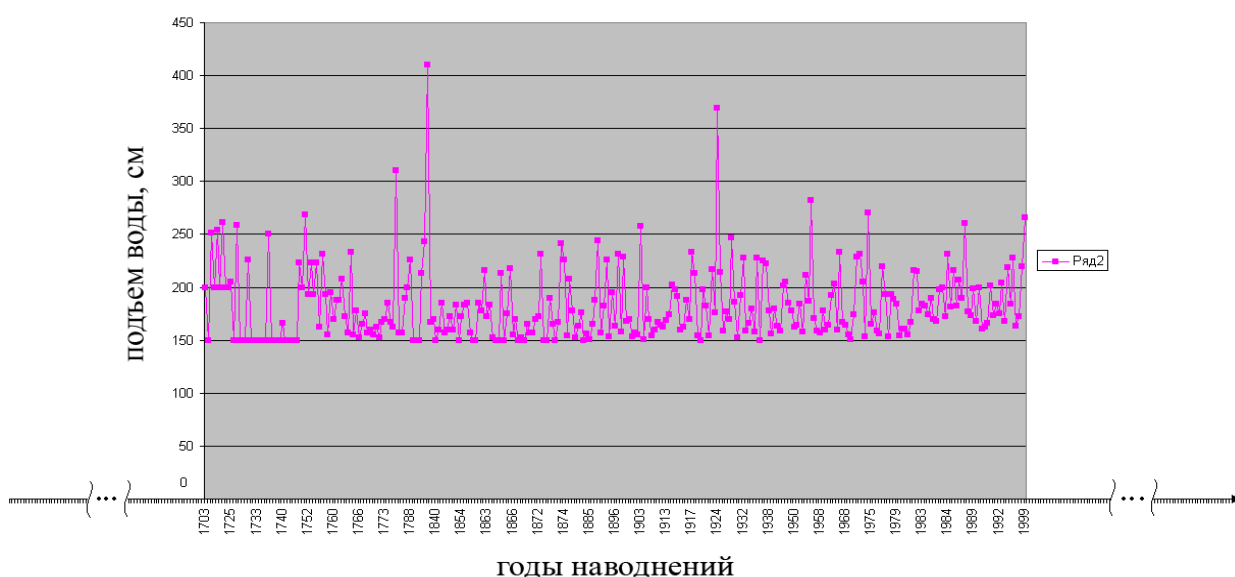


Рис. 11

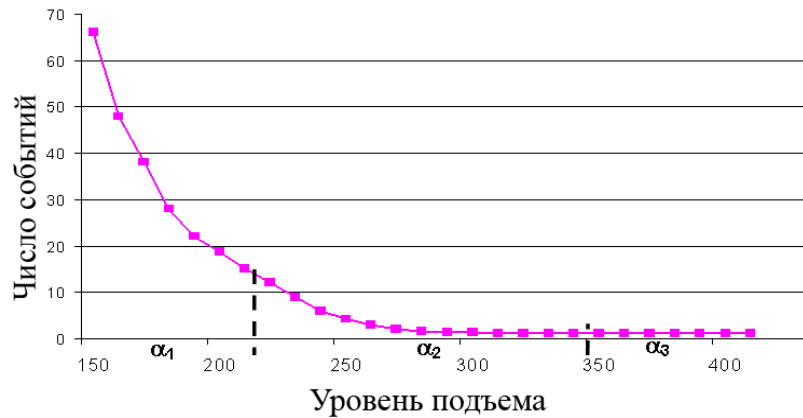


Рис. 12

Очевиден нелинейный характер распределения частоты встречаемости уровней наводнения и их степенной характер. Из этого распределения также следует разномасштабная прогностическая ценность ожидаемых событий. Выделяя 3- участка: часто встречающиеся, редкие и максимально наблюдаемые, определим интервалы их появления на протяжении 300-т лет. С периодичностью в 100-лет имело место наводнение от 3,5 до 4,1- метра, и раз в 25 лет 2,3 - 3,4. Будущее прогнозное ожидание обязательно должно учитывать повышающий масштабный коэффициент, неопределенность лишь в незнании места расположения нашего наблюдаемого участка на более глобальном историческом отрезке.

Подобный анализ с позиций геологических моделей подробно рассмотрен и в [27].

Здесь приведем выдержки, которые и проистекают из рассматриваемого подхода анализа РПС.

В Нидерландах к началу 20-х годов прошлого века правительственный комитет по защите от наводнений установил уровень защитных сооружений в 390 см - такой подъем воды на побережье никогда не наблюдался. Гидротехники не стали ориентироваться на столь редкое событие и приняли величину 340 см с вероятностью достижения этого уровня раз в 70 лет. Это значение было всего на 12 см выше абсолютного максимума, зарегистрированного для периода примерно в 25 лет. Стремление удешевить строительство обернулось трагедией 1 февраля 1953 г., когда ураган унес около 2000 жизней и вызвал огромные разрушения. Ныне в Нидерландах гидротехнические сооружения решено строить в расчете на максимальный уровень 500 см, возможный лишь раз в 10 000 лет.

С точки зрения описания случайных процессов это означает, что распределения вероятностей случайных величин, характеризующих наводнения (уровни воды в реке, объемы стока за половодье, максимальные расходы воды и т. п.), являются «распределениями с тяжелыми хвостами». В терминах оценки безопасности и риска «хвост» распределения соответствует так называемым гипотетическим наводнениям, возможность которых на практике пока не учитывается. **Наличие степенного закона распределения вероятностей в корне изменяет наши представления о возможных масштабах наводнений.**

...выпадение осадков следует гауссовскому закону, а “тяжелый хвост” распределения формируется гидрофизическими процессами на водосборе, и важно то обстоятельство, что в формировании стока в данный момент участвуют осадки предыдущих времен. Математическая формализация этого известного гидрологического явления и дает в итоге степенные законы вероятностей паводков и наводнений.

Например, такое наводнение, как знаменитое наводнение в Санкт-Петербурге, произошедшее 19 ноября 1824 г. (уровень воды в Неве на 421 см выше ординара), должно

происходить один раз в 667 лет с точки зрения степенного распределения. По гамма-распределению это событие практически невозможно (происходит реже чем один раз в 20 000 лет). Наводнение, случившееся 23 сентября 1924 г. (уровень воды в Неве 380 см), имеет вероятность 0.0039 (раз в 256 лет) по степенному распределению и 0.00036 (раз почти в 3000 лет) по гамма-распределению, т. е. снова малореально. Но оба эти события имели место.

3. Адаптивная динамическая сегментация. Для реализации отдельных этапов преобразования видеоданных в образно-семантическое представление был разработан метод построения ассоциативных адаптивно-динамических структур данных [13,14], которые включают:

- Алгоритм представления изображения фрагментами яркостных и цветовых характеристик, задавая переменный порог отсечки ;
- Механизм вторичной индексации сегментов выделенных фрагментов для построения деревьев иерархической связи;
- Процедура реструктуризации связей как механизм внесения прагматики в анализ видеоданных.

Поля фрагментов, полученные в результате циклического процесса последовательного увеличения допустимого порога отклонения яркостных и цветовых составляющих при их объединении во фрагменты, образуют последовательно укрупняющуюся пирамидально-иерархическую структуру плоских сетей фрагментов, каждый из которых может иметь своего потомка или предка, что и образует адаптивно-динамическую структуру данных.

Фрагментом изображения называется узел пространственной структуры, атрибутами которого являются простые числа, ассоциируемые со средними цветовыми и яркостными составляющими данного фрагмента, а также множество пикселей, составляющих площадь и обеспечивающих графическую форму данного фрагмента. Это и позволяет организовать объектно-ориентированную идентификацию семантически значимых областей изображения.

Проведенная статистика распределения количества фрагментов по уровням указывает на непосредственное проявление степенной закономерности. На рис.13 отображена зависимость количества построенных областей от номера уровня в иерархии фрагментов на примере шести тестовых изображений.

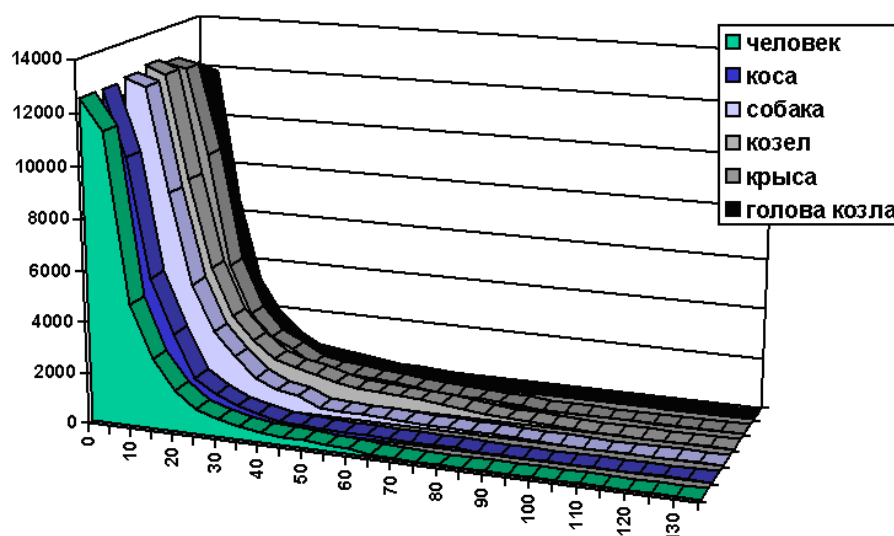


рис. 13

Последовательное объединение фрагментов по критерию эквивалентности (ϵ_r) приводит к образованию их многоуровневой иерархии. Многоуровневая фрагментация

является эффективным способом компрессии видеоданных и ассоциативным, семантической поиском изображений.

4. Самоподобие в звуке и музыке. Тон Шепарда. Известно, что составляющие гармонических звуков связаны друг с другом определенной зависимостью. Так, например, тон Шепарда объясняется цикличностью восприятия тона [19].

М. Шредер [11] показал, что слуховой парадокс, создаваемый тоном Шепарда, объясняется самоподобием фрагментов сигнала и может быть воспроизведен функцией К. Вейерштрасса

$$\omega(\beta t) = \sum_{k=0}^M \cos(\beta^{k+1}t) = \sum_{k=0}^{M+1} \cos(\beta^k t),$$

где M - количество составляющих, а β - геометрическая связь между двумя соседними составляющими. Хотя Шепард применяет форматную огибающую для частотной области представления сигнала, это сделано, чтобы сгладить восприятие переходов и усилить эффект парадокса. Парадокс происходит оттого, что ухо пытается выделить одномерный сигнал (переменная – высота звука) из многомерного сигнала (тембр). Можно представить, что высота звука - это значение, устанавливающее связь между составляющими сигнала одномерным способом. Изменение масштаба в соответствии с одинаковым отношением β изменяет не «тело» сигнала, а его граничные условия. Поэтому мы слышим ту же высоту тона, а не высоту, обусловленную изменением масштаба.

5. Инфология. Рост: информационных ресурсов Интернет - пространства и их потребителей, уже достиг критического уровня эффективного функционирования. Увеличение количества информационных ресурсов происходит за счет дублирования, а также за счет примитивной компиляции уже имеющихся. Это естественный процесс, развивающийся за счет новых публикаций, а также за счет «журнализации событий» развивающегося мира – новостей. Подобное экстенсивное увеличение количества доступных ресурсов дает большую нагрузку на поисковые машины, которые должны адекватно отвечать на запросы пользователей и выдавать адекватные, актуальные и достоверные данные.

Кроме того, увеличение популярности широковещательных сервисов распространения звукового и видео – контента (потокное аудио и видео, подкастинг и тому подобные сервисы) распространяют проблему роста информационных ресурсов еще и на ограниченную пропускную способность существующих каналов передачи данных. Уже само введение понятия подкастинг (podcasting) как нового формата радиовещания показывает тенденцию развития проблемы.

Но одновременно с этим имеется и преднамеренное заполнение большого количества ресурсов бесполезной информацией – текстами, составленными из несвязных фрагментов различных текстов (поисковым спамом). Рост количества бесполезных документов, направленных на поисковый спам уже превосходит в размерах, объем полезных документов и направлен на получение сиюминутной выгоды владельцами подобных «информационных помоек». Рекламные, игровые ресурсы, а также просто каталоги бесполезных ссылок на такие же каталоги «забивают» образовательные и справочные ресурсы, которые должны быть доступны в первую очередь.

Подобная проблема возникла за счет особенности функционирования современных поисковых машин – поиске вхождений интересующих слов в документ без проверки реальной полезности и качества самой страницы.

Возможным решением являются инфологические информационные системы, одним из представителей которых является система VisualWorld (www.visualworld.ru). Информационное содержание в такой системе не хранится в виде текстов, а содержит лишь важнейшие понятийные отношения, необходимые для идентификации текста.

Семантические связи представленного термина сформированы на основе данных сети Интернет. Нажимая на термины, можно перемещаться по семантическому окружению слова.

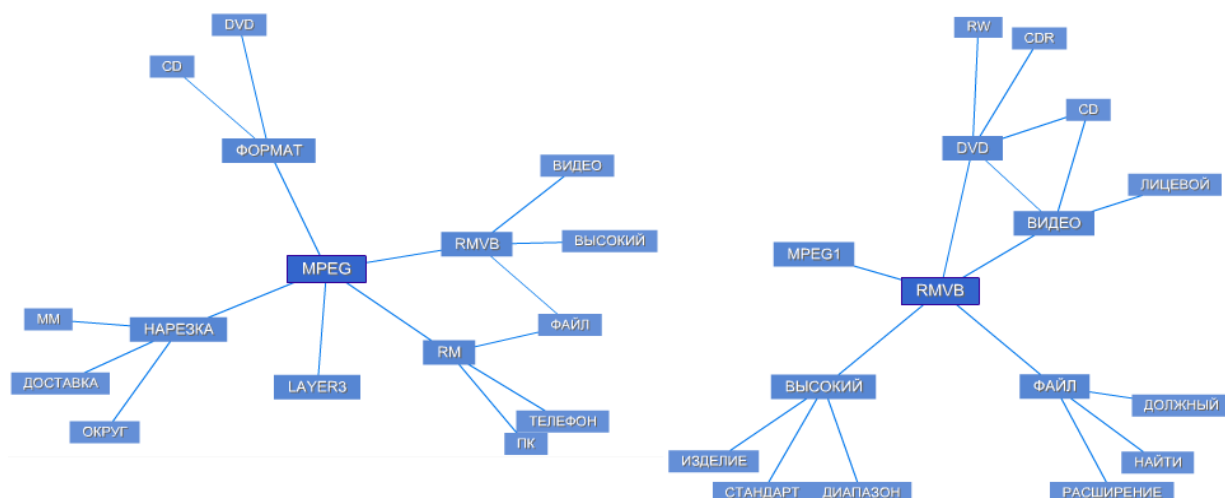


Рис. 14 Понятийные отношения в системе VisualWorld.ru

Работа инфологических систем основана на визуально-динамическом представлении знаний как итерационном процессе $I = i(D, S, T)$ последовательного постепенного формирования знаний, где обработка данных D превращается в информацию I на заданном интервале времени T , формирующее онтологические знания S в виде антологий по проблемно-предметным областям, i - процесс их интерпретаций – топики. Каждая следующая итерация обеспечивает процесс развития знаний, порождая новую порцию информации. Таким образом, инфология – развивающийся процесс представления системы знаний.

Рассматривается визуально-динамическое представление знаний как итерационный процесс $I = i(D, S, T)$ последовательного постепенного формирования знаний, где обработка данных D превращается в информацию I на заданном интервале времени T , формирующее онтологические знания S в виде антологий по проблемно-предметным областям, i - процесс их интерпретаций – топики. Каждая следующая итерация обеспечивает процесс развития знаний, порождая новую порцию информации. Таким образом, инфология – развивающийся процесс представления системы знаний.

Можно утверждать, что образ или событие любой природы имеют некоторую собственную семантику. Эта собственная семантика универсальна и контекстно-интерпретируема в некотором конечном наборе смыслов или событий. Это утверждение основано на возможности осмысления, хотя возможно и не однозначного, практически любого образа или события внешнего мира, даже лишённого собственного контекста. Вот почему писатели, фантасты, сказочники всегда опережают научно-технические открытия и инженерные решения. И когда мы что-либо обозначаем, мы исходим из того, что смысл понят, что он уже налицо. Мы не переходим от звуков к образам и от образов к смыслу: мы с самого начала помещены в смысл. Смысл предписывает возможные обозначения и условия, и в свою очередь является объектом следующего предложения. Тогда если принять предложение за некое имя, то ясно, что каждое имя, обозначающее объект, само может стать объектом нового имени, обозначающего его смысл: $n1$ отсылает к $n2$, которое обозначает смысл $n1$; $n2$ отсылает к $n3$ и так далее. Для каждого из своих имён язык должен содержать некоторое имя для смысла этого имени. Такое бесконечное размножение вербальных сущностей известно как *парадокс Фреге*.

Следовательно, сами по себе как *самостоятельные субстанции* не существуют у человека: смысл, память, знание, познание. Это просто имена (метки), синонимы, ассоциативно отражающие *продукт функционирования Мозга*, как инструмент (процессор) этерификаций.

Эпистомеологически степенные закономерности, в том числе и позиционные системы счисления, реализуют принцип этерификации (компрессии) «сказать меньше слов и быть понятым» (Ципф).

Понятие этерификации лежит в основе технического и цивилизационного прогресса. Согласно Дж. Тойнби [28] «...в истории письменности наблюдается не только соответствие между развитием техники письма и упрощением формы, но и эти две тенденции фактически тождественны друг другу, поскольку вся техническая проблема, которую должно решить письмо как фиксатор, посредник человеческой речи, - это отчётливая репрезентация широчайшей сферы человеческого языка с максимальной экономией визуальных символов, т.е. **этерификация есть закон прогрессирующего упрощения....**»

«...Думай о смысле, слова придут сами...» - эта классическая фраза Льюиса Кэрролла по мере ее осознания становится все интереснее и важнее. Так, в исследованиях типа искусственного интеллекта, сегодня важным становится не нахождение формального представления контекстно-независимого языка, а исследование логики смысла.

Как отмечал Ф. Ницше «...убедительность результатов познавательной деятельности не определяется степенью истинности, а тем - насколько давно они были достигнуты, прочно ли усвоены и способны ли быть условием жизни...».

Литература

1. Александров В.В. Развивающиеся системы в Науке, Технике, Обществе и Культуре. – СПб: Изд. СПбГТУ, 2000, – 244 с.
2. Г. Николис, И. Пригожин. Познание сложного. Пер. с англ., М., Мир, 1990, 275 с.
3. D.R. Hofstadter. Godel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid. - NY., Basic Books, 1979 - 779p.
4. Александров В.В., Арсентьева А.В. Информация и развивающиеся структуры. - Л., ЛИИАН, 1984 - 182 с.
5. Александров В.В. Интеллект и компьютер. – СПб.: Изд. «Анатолия», 2004. – 285 с.
6. Витрувий М.П. Десять книг об архитектуре. / Пер. с лат. Ред. и введ. А.В.Мигулина. – Л.: Соцэкгиз, Ленингр. отд-ние, 1936. – 341 с. с илл., 1 вкл. л. крас. илл.
7. Архитектурная бионика /Ю.С.Лебедев, В.И.Рабинович, Е.Д.Положай и др.; Под ред. Ю.С.Лебедева. – М.: Стройиздат, 1990. – 269.
8. В.Е. Еремеев. Чертеж антропокосмоса. АСМ, Москва, 1993.
9. Журнал «Наука и жизнь» № 10,2006.
10. Пер Бак, Кан Чен. Самоорганизованная критичность // В мире науки. – 1991. - №3. – С.16-21.
11. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001 – 528 с.
12. Дорофеева А. В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс (К 170-летию со дня рождения). – М.:Знание, 1985.- 48 с.
13. Бутенин Н.В. Работы А.А.Андропова и его школы по теории нелинейных колебаний. – Горьковский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Межвузовский сборник «Динамика систем», вып.12, г. Горький, 1977
14. *Edward N. Lorenz. Determenistic non Periodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences 20, March 1963*

15. *James Gleick*. Chaos. Making a New Science, 1987 – 400 p.
16. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987 – 304 с.
17. Дж. Касти. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. Пер. с английского под редакцией д-ра физ.-мат. наук Ю.П. Гупало и канд. физ.-мат. наук А.А. Пионтовского, М. «Мир» 1982, - 216 с., ил.
18. B.B. Mandelbrot. Fractals Form, Chance and Dimension. – W.H. Freeman and Company. San Francisco, 1977. – 365 p.
19. S.D. Jadedari. Self-similar Synthesis On the Border Between Sound and Music. - MIT, 1992.-146p.
20. G.K. Zipf. Human behaviour and the principle of least effort. Addison Wesley Publ. Co., Inc., Cambridge, Mass., 1949.
21. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 2003
22. Александров В.В., Горский Н.Д. Представление и обработка изображений. Рекурсивный подход. - Л., Наука, 1985 - 190 с.
23. Александров В.В., Лачинов В.М., Поляков А.О. Рекурсивная алгоритмизация кривой, заполняющей многомерный интервал // Известия АН СССР. Техническая кибернетика”. – 1978. - N 1. -С. 192-198.
24. *Alexandrov V.V, Latchinov V.M., Polyakov A.O.* Synthese et application d’analogue multidimensionnel de courbe de Peano In book: Congres AFCET/IRIA, Paris - Le chesnay v.2, fevrier 1978.
25. *Alexandrov V.V., Gorsky N.D., Polyakov A.D.* Aigorithmes recursifs pour le traitement et a representation de donnees (en russe), 1979. Pub. du Centre de Calcul de l’Acad. Sc. d’URSS, Leningrad.
26. Фрост А., Пректер Р., Полный курс по Закону волн Эллиотта. М., 2001. 136 с.
27. Найденов В.И., Кожевникова И.А. Почему так часто происходят наводнения? // Журнал «Природа» 2003. №9.
28. *Тойнби А. Дж.* Постигание истории. — Пер. с англ./Сост. Огурцов А.П.; Вступ. ст. Уколовой В. И. ; Закл. ст. Рашковского Е. Б. — М.: Прогресс. 1996 — 608 с.
29. <http://www.forbes.com/billionaires/>